兩直線的相交

- 兩直線的相交

齊來傾數

兩直線的相交

兩直線有以下三個相交的情況。

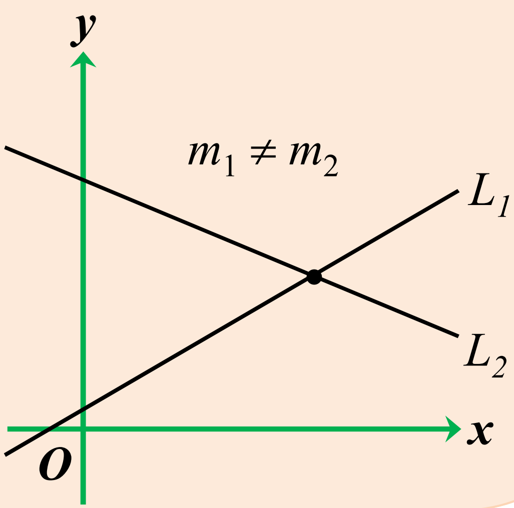
考慮在同一個直角坐標平面上的兩條直線 L_1 和 L_2。

設

m_1 和 c_1 分別是 L_1 的斜率和 y 軸截距；
m_2 和 c_2 分別是 L_2 的斜率和 y 軸截距。

(1) 只有一個交點

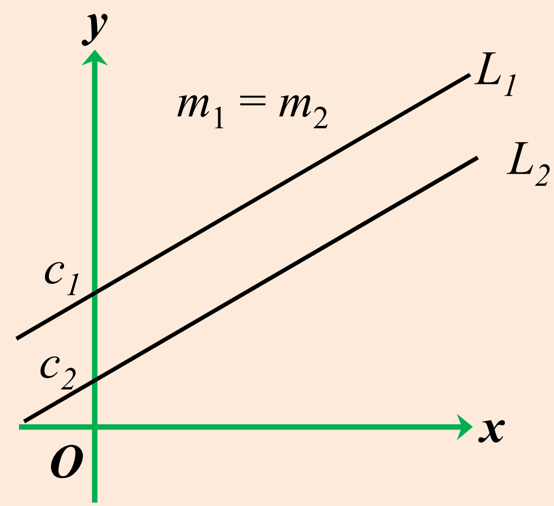
L_1 和 L_2 的斜率不同，
即 $m_1 \neq m_2$。



兩直線的相交

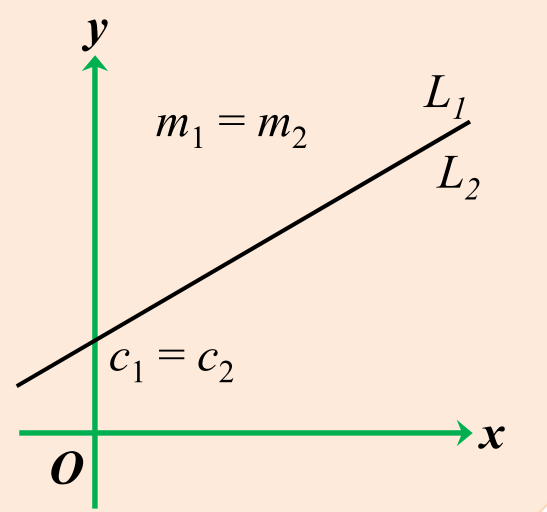
(2) 沒有交點

L_1 和 L_2 的斜率相同，但 y 軸截距不同，
即 $m_1 = m_2$ 和 $c_1 \neq c_2$。
在這個情況下，L_1 和 L_2 互相平行。



(3) 有無限個交點

L_1 和 L_2 的斜率相同，且 y 軸截距也相同，
即 $m_1 = m_2$ 和 $c_1 = c_2$。
在這個情況下，L_1 和 L_2 重疊。L_1 和 L_2
的方程表示同一條直線。



兩直線的相交

例 1

下列各題中，求 L_1 和 L_2 的交點數目。當 L_1 和 L_2 只相交於一點時，求交點的坐標。

(a) $L_1: y = -3x + 7$ $L_2: 3x + y + 7 = 0$

(b) $L_1: x - 4y + 3 = 0$ $L_2: 8y = 2x + 6$

(c) $L_1: 5x + 2y - 8 = 0$ $L_2: 2y = 5x + 8$

(a) L_1 的斜率 $= -3$

L_1 的 y 軸截距 $= 7$

L_2 的斜率 $= -\frac{3}{1} = -3$

L_2 的 y 軸截距 $= -\frac{7}{1} = -7$

L_1 和 L_2 的斜率相同，但 y 軸截距不同。

$\therefore$ L_1 和 L_2 沒有交點。

兩直線的相交

例 1

下列各題中，求 L_1 和 L_2 的交點數目。當 L_1 和 L_2 只相交於一點時，求交點的坐標。

(a) $L_1: y = -3x + 7$ $\quad L_2: 3x + y + 7 = 0$

(b) $L_1: x - 4y + 3 = 0$ $\quad L_2: 8y = 2x + 6$

(c) $L_1: 5x + 2y - 8 = 0$ $\quad L_2: 2y = 5x + 8$

(b) L_1 的斜率 $= -\dfrac{1}{-4} = \dfrac{1}{4}$

L_2 的斜率 $= \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

L_1 的 y 軸截距 $= -\dfrac{3}{-4} = \dfrac{3}{4}$

L_2 的 y 軸截距 $= \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

L_1 和 L_2 的斜率相同，y 軸截距也相同。

$\therefore$ L_1 和 L_2 有無限個交點。

兩直線的相交

例 1

下列各題中，求 L_1 和 L_2 的交點數目。當 L_1 和 L_2 只相交於一點時，求交點的坐標。

(a) $L_1: y = -3x + 7$ $\quad$ $L_2: 3x + y + 7 = 0$

(b) $L_1: x - 4y + 3 = 0$ $\quad$ $L_2: 8y = 2x + 6$

(c) $L_1: 5x + 2y - 8 = 0$ $\quad$ $L_2: 2y = 5x + 8$

(c) L_1 的斜率 $= -\dfrac{5}{2}$ $\quad$ L_2 的斜率 $= \dfrac{5}{2}$

L_1 和 L_2 的斜率不同。

$\therefore$ L_1 和 L_2 只有一個交點。

兩直線的相交

例 1

下列各題中，求 L_1 和 L_2 的交點數目。當 L_1 和 L_2 只相交於一點時，求交點的坐標。

(a) L_1: $y = -3x + 7$ L_2: $3x + y + 7 = 0$

(b) L_1: $x - 4y + 3 = 0$ L_2: $8y = 2x + 6$

(c) L_1: $5x + 2y - 8 = 0$ L_2: $2y = 5x + 8$

(c) L_1: $5x + 2y - 8 = 0$ .... (1)

L_2: $2y = 5x + 8$ .... (2)

把 (2) 代入 (1)。$5x + (5x + 8) - 8 = 0$

$$10x = 0$$

$$x = 0$$

把 $x = 0$ 代入 (2)。 $2y = 5(0) + 8$

$$y = 4$$

$\therefore$ 交點的坐標是 (0, 4)。

兩直線的相交

例 2

考慮兩條直線 L_1 和 L_2。

L_1: $5x + 2y - 14 = 0$ .... (1)

L_2: $x - 3y - 13 = 0$ .... (2)

已知 L_1 和 L_2 相交於 P 點。

(a) 求 P 的坐標。

(b) 直線 L_3 穿過 P，並垂直於直線 L_4: $4x - y + 6 = 0$ 。求 L_3 的方程。

(a) (2) × 5: $5x - 15y - 65 = 0$ .... (3)

(1) – (3): $(5x + 2y - 14) - (5x - 15y - 65) = 0$

$17y + 51 = 0$

$y = -3$

把 $y = -3$ 代入 (2)。 $x - 3(-3) - 13 = 0$

$x = 4$

∴ P 的坐標是 (4, –3)。

兩直線的相交

例 2

考慮兩條直線 L_1 和 L_2。

$$L_1: \quad 5x + 2y - 14 = 0 \quad \text{..........} (1)$$

$$L_2: \quad x - 3y - 13 = 0 \quad \text{..........} (2)$$

已知 L_1 和 L_2 相交於 P 點。

(a) 求 P 的坐標。

(b) 直線 L_3 穿過 P，並垂直於直線 L_4: $4x - y + 6 = 0$ 。求 L_3 的方程。

(b) L_4 的斜率 $= -\dfrac{4}{-1} = 4$

$\therefore \quad L_3$ 的斜率 $= -\dfrac{1}{4}$

L_3 的方程：

$$y - (-3) = -\frac{1}{4}(x - 4)$$

$$4y + 12 = -x + 4$$

$$x + 4y + 8 = 0$$